Universidad Rey Juan Carlos

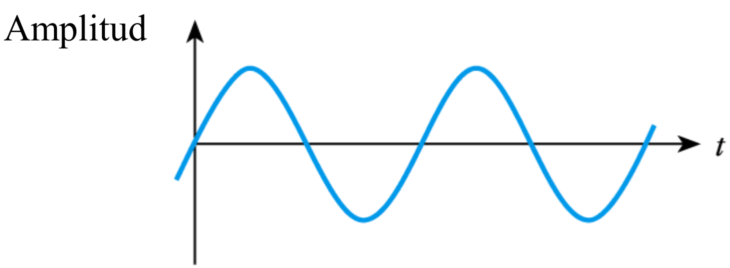
Tema 2. Corriente alterna

Joaquín Vaquero López, 2013

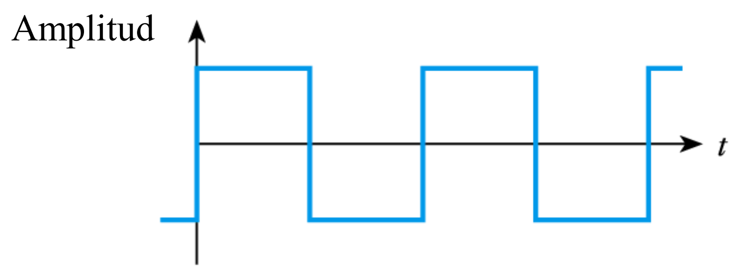
Índice

Señales variables en el tiempo

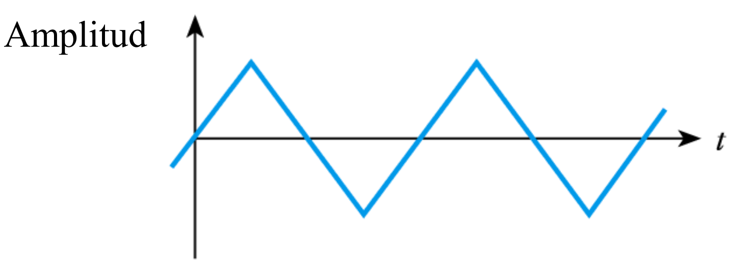
- La corriente y la tensión en los circuitos puede ser constante (CC) o variable con el tiempo (CA)
- Escalón y rampa. Formas de onda periódicas



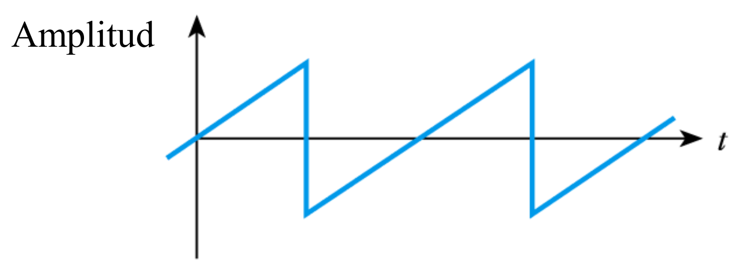
Onda sinusoidal



Onda cuadrada



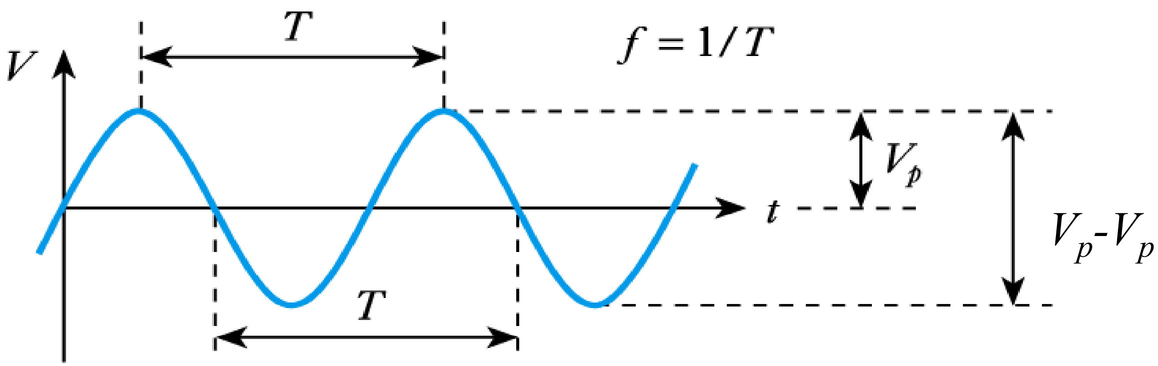
Onda triangular



Diente de sierra

Forma de onda senoidal

- Período T (s), frecuencia f (Hz), amplitud o valor de pico V_p, ω (rad), frecuencia angular, ϕ fase $(grados\ o\ rad)$

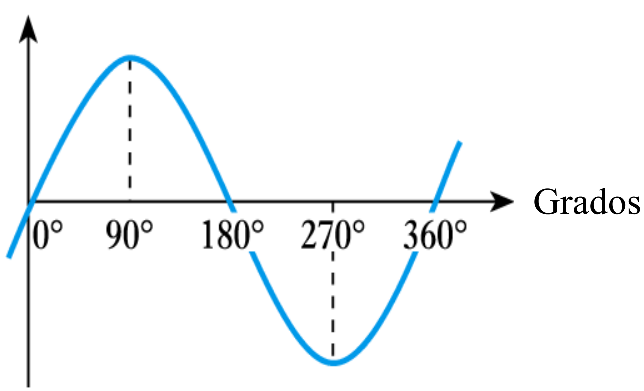


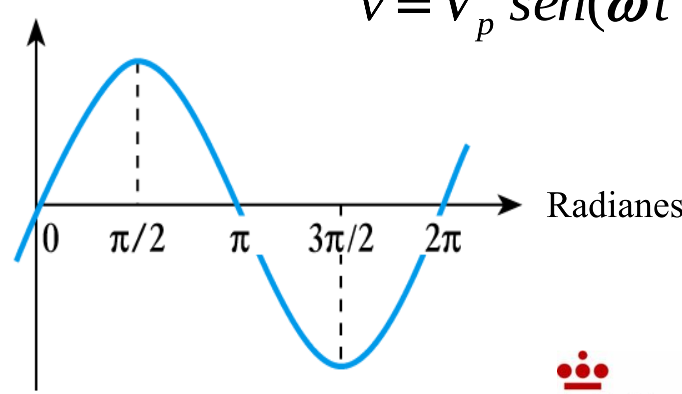
$$v = V_p\, sen(\phi) = V_p\, sen(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi f \ \ \mathrm{rad/s}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$v = V_p\, sen(\omega t + \phi)$$





Forma de onda senoidal. Carácterísticas

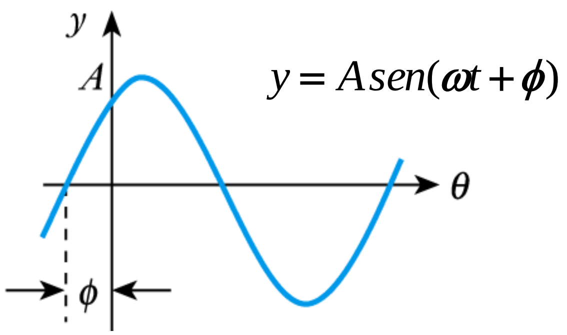
- La respuesta en régimen permanente de un circuito lineal con excitación senoidal es una función senoidal de igual frecuencia. La amplitud y la fase puede variar.
- La suma de funciones senoidales de igual frecuencia es una función senoidal de igual frecuencia. La amplitud y la fase puede variar.
- La derivada de una senoide es de forma senoidal, y su integral también.

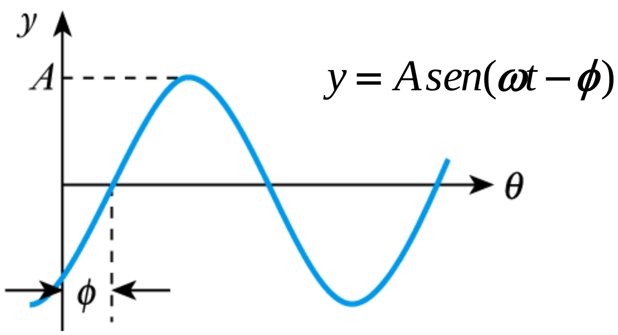
Forma de onda senoidal. Carácterísticas

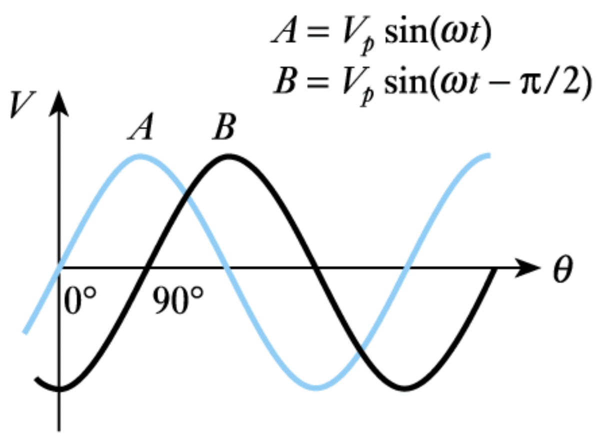
- Mediante la descomposición en serie de Fourier cualquier función periódica puede representarse como una combinación lineal de un número finito de funciones senoidales.
- Los alternadores generan tensión con forma senoidales. Es una forma de onda fácil de obtener.
- La respuesta de un sistema ante funciones senoidales de distinta frecuencia nos da información del sistema. **Respuesta en frecuencia.**

Forma de onda senoidal. Fase

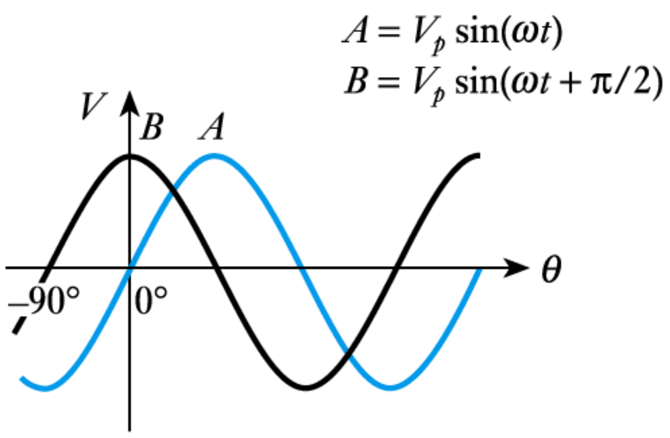
- Período (ángulo) desde un valor de referencia







B va retrasada 90ºrespecto de *A*

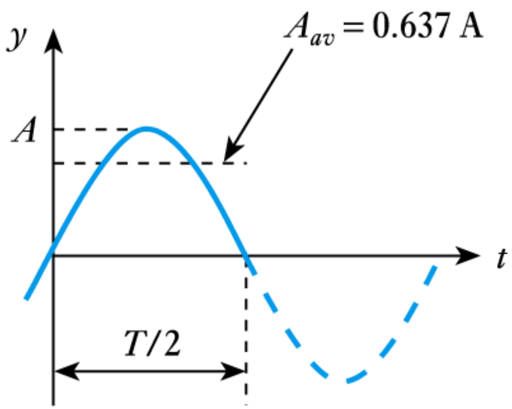


B va adelantada 90º respecto de *A*

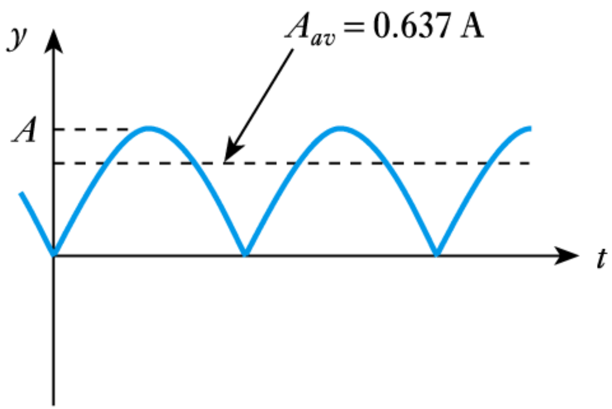
Forma de onda senoidal. Valor medio

- El valor medio en un ciclo es 0
- Suponiendo medio ciclo u onda rectificada:

$$V_{m(av)} = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} V_p sen(\phi)\, d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V_p sen(\phi)\, d\phi = \frac{V_p}{\pi}\left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi} = \frac{2V_p}{\pi} = 0.637 \times V_p$$



Valor medio calculado sobre medio ciclo de onda



Valor medio calculado sobre la onda rectificada

Forma de onda senoidal. Valor eficaz

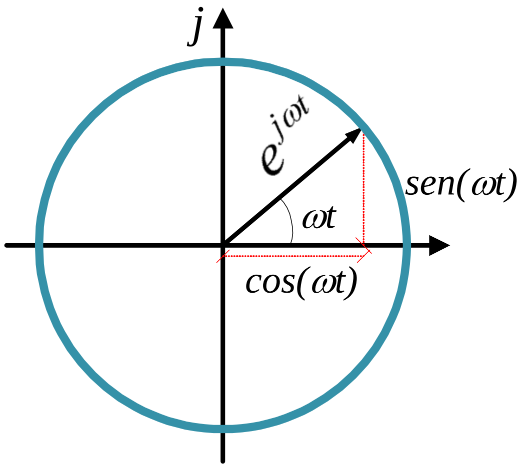
- El valor eficaz es la raíz cuadrada del valor cuadrático medio (r.m.s.)
- Su utilidad deriva de que la potencia medida mediante valores eficaces es equivalente a la de los valores de CC.

$$P_{mc.c.(av)} = I_{CC} \cdot V_{CC} \qquad P_{mc.a.(av)} = I_{ef} \cdot V_{ef}$$

$$V_{ef\,(rms)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T}\left[V_p sen(\phi)\right]^2 d\phi} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[V_p sen(\phi)\right]^2 d\phi} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Régimen senoidal permanente

- Notación compleja. Euler



$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\,sen(\omega t)$$
$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\,sen(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right]$$
$$sen(\omega t) = \mathrm{Im}\left[e^{j\omega t}\right]$$

$$v(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \phi_V) = V_p \cdot \mathrm{Re}\left[e^{j(\omega t + \phi_V)}\right] = V_p \cdot \mathrm{Re}\left[e^{j\phi_V} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$v(t) = V_p \cdot e^{j\phi_V} e^{j\omega t}; \quad i(t) = I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$$

Resistencias

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

Bobinas

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Condensadores

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Elementos pasivos. Módulo y fase

- Respuesta de los elementos pasivos básicos. Impedancia

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$V_p \cdot e^{j\phi_V} e^{j\omega t} = R \cdot I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$$

$$R = \frac{V_p}{I_p}$$

$$\varphi_V = \varphi_i$$

La corriente está en fase con la tensión

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$V_p \cdot e^{j\phi_V} e^{j\omega t} = j\omega L \cdot I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$$

$$V_p \cdot e^{j\phi_V} = \omega L \cdot I_p \cdot e^{j\phi_i + \pi/2}$$

$$V_p = \omega L \cdot I_p$$

$$\mathcal{Z}_L = j\omega L$$

$$\phi_V = \phi_i + \pi/2$$

$$\phi_i = \phi_V - \pi/2$$

La corriente retrasa 90º a la tensión

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t} = j\omega C \cdot V_p \cdot e^{j\phi_V} e^{j\omega t}$$

$$I_p \cdot e^{j\phi_i} = \omega C \cdot V_p \cdot e^{j\phi_V + \pi/2}$$

$$I_p = \omega C \cdot V_p$$

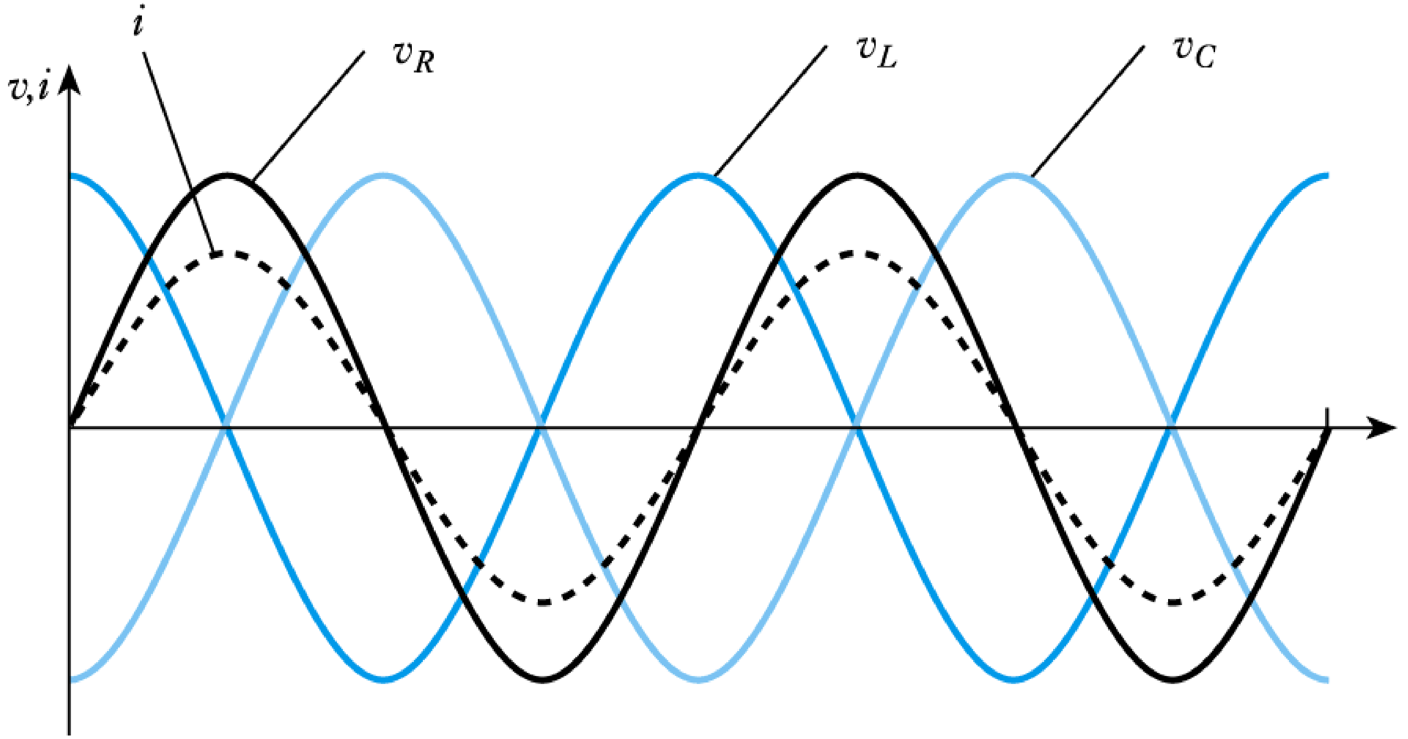
$$\mathcal{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\phi_i = \phi_V + \pi/2$$

La corriente adelanta 90º a la tensión

Elementos pasivos

- Formas de onda de la tensión y la corriente en los elementos pasivos básicos. Reactancia



Resistencia

$R[\Omega]$

Reactancia inductiva

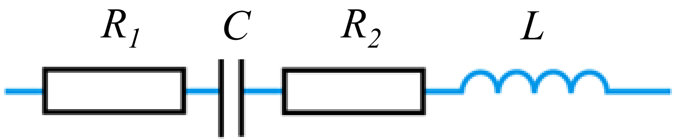
$X_L = \omega L[\Omega]$

Reactancia capacitiva

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}[\Omega]$

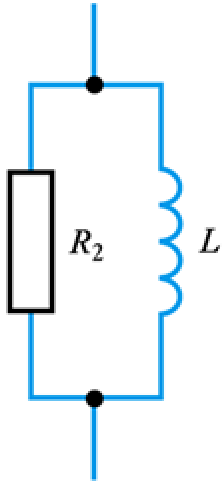
Elementos pasivos. Serie y paralelo. Impedancias

- **Serie**. Todos los elementos recorridos por la misma corriente



$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{R_1} + \mathcal{Z}_C + \mathcal{Z}_{R_2} + \mathcal{Z}_L$$

- **Paralelo**. Todos los elementos sometidos a la misma tensión

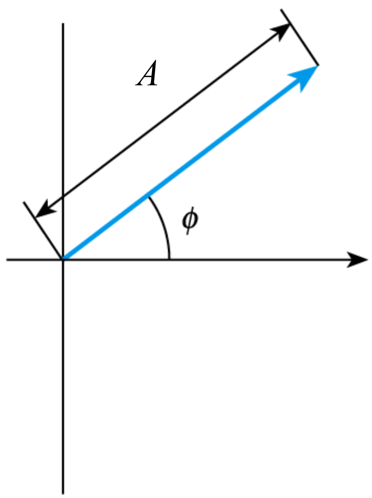


$$\frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{R_2}} + \frac{1}{\mathcal{Z}_L}$$

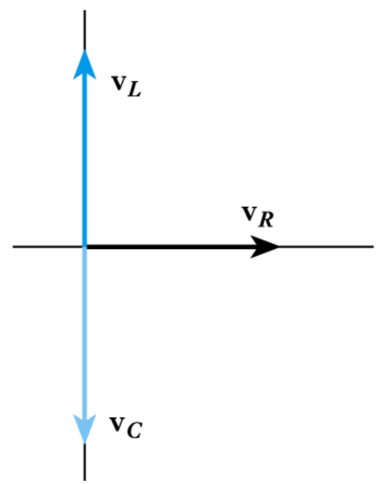
$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2} + \frac{1}{\mathcal{Z}_3} + \ldots}$$

Diagramas de fase o vectoriales

- En sistemas de frecuencia fija, una señal senoidal queda caracterizada por el módulo y la fase
- Un diagrama de fase permite representar módulo y fase en un único diagrama



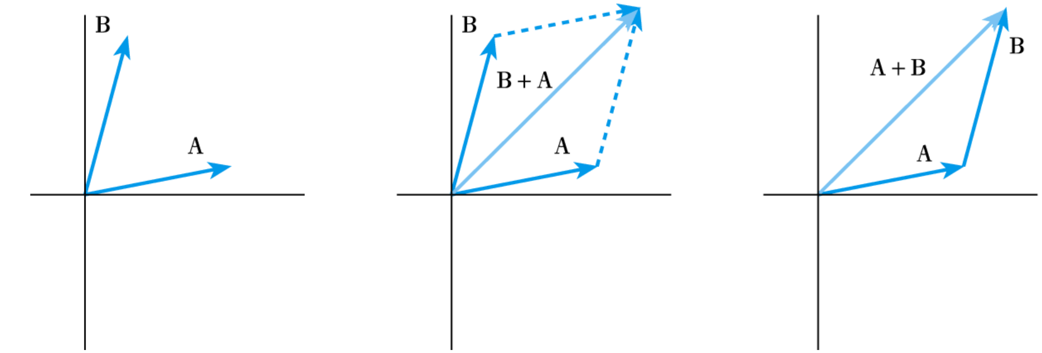
Representación fasorial de una señal de magnitud A y fase ϕ



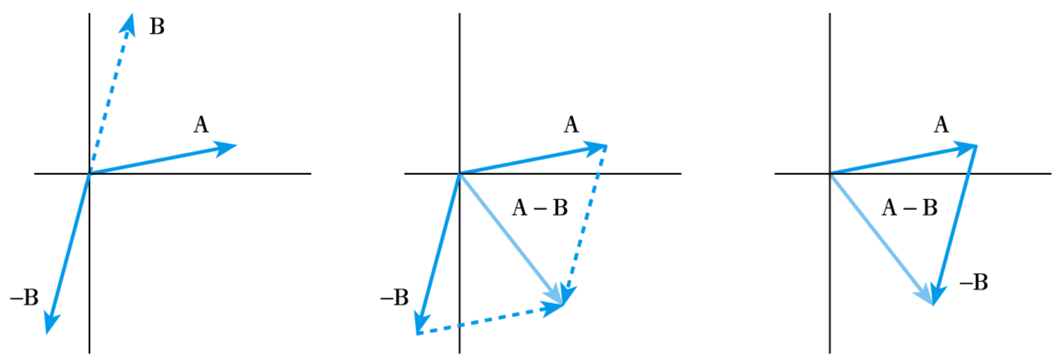
Representación fasorial de la tensión en una resistencia R, una inductancia L y un condensador C

Diagramas de fase o vectoriales

- Un diagrama de fase permite sumar y restar vectorialmente señales senoidales de igual frecuencia



Suma fasorial o vectorial $A+B$

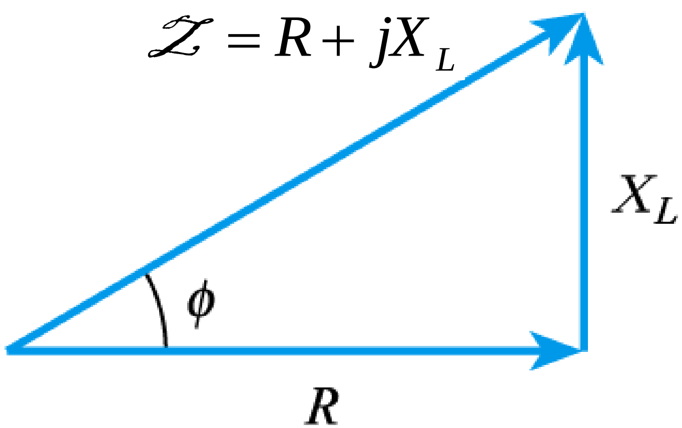


Resta fasorial o vectorial A-B

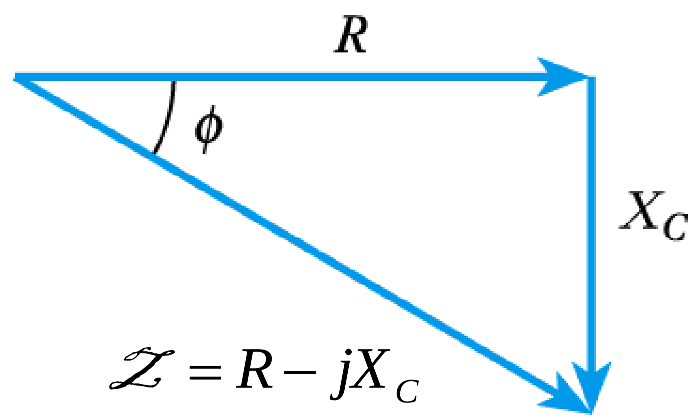
Universidad Rey Juan Carlos

Diagramas de fase o vectoriales. Impedancias

- Un diagrama de fase permite representar impedancias complejas mediante su módulo y argumento (fase)



Representación gráfica de una impedancia *RL*



Representación gráfica de una impedancia *RC*

- Generalización de la Ley de Ohm. $\mathcal{V} = \mathcal{Z} \cdot \mathcal{I}$

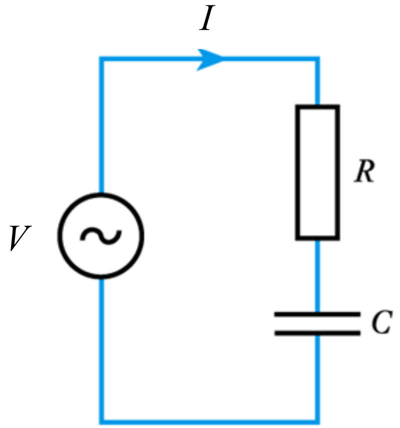
Circuitos de 1er orden. RC

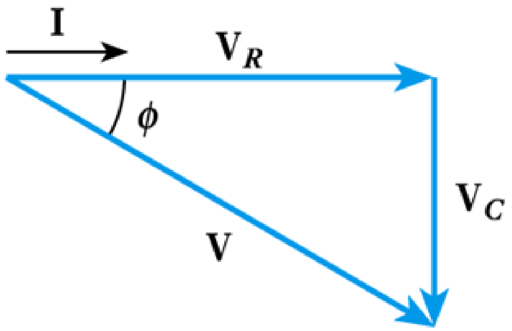
- Circuitos formados por resistencias, fuentes independientes y un solo elemento almacenador de energía (L ó C). Se caracterizan por una ecuación diferencial de primer orden

Resolución fasorial o vectorial

Módulo:

$$V=\sqrt{R^2 \cdot I^2+\frac{I^2}{(\omega C)^2}} \Rightarrow I=\frac{V}{\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}}$$





Argumento:

$$\phi_i=\phi-\phi_v; \quad \phi=arctg\frac{1}{\omega RC}$$

Solución:

$$i(t)=\frac{V}{\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}}\cdot\cos(\omega t+\phi-\phi_v) \Leftrightarrow v_C(t)=\frac{V}{\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}}\cdot\frac{1}{\omega C}\cdot sen(\omega t+\phi-\phi_v)$$

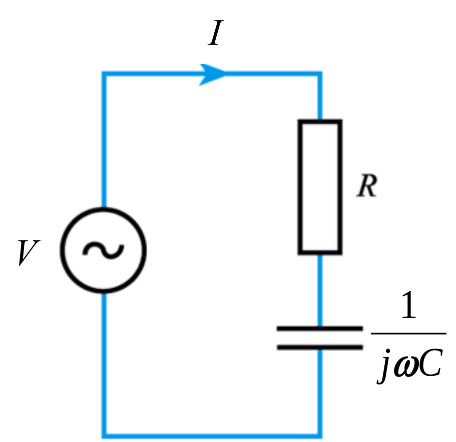
Método muy laborioso y difícil para circuitos más complicados

Circuitos de 1er orden. RC

- Resolución directa al régimen senoidal permanente mediante complejos

Función de transferencia $\mathcal{H}(j\omega)$

$$\mathcal{V}_C = \frac{\frac{1}{j\omega C}\cdot\mathcal{V}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{\mathcal{V}}{1+j\omega RC} \Rightarrow \mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{V}_C}{\mathcal{V}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$



Módulo:

$$\left|\mathcal{H}(j\omega)\right| = \left|\frac{\mathcal{V}_C}{\mathcal{V}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

Argumento:

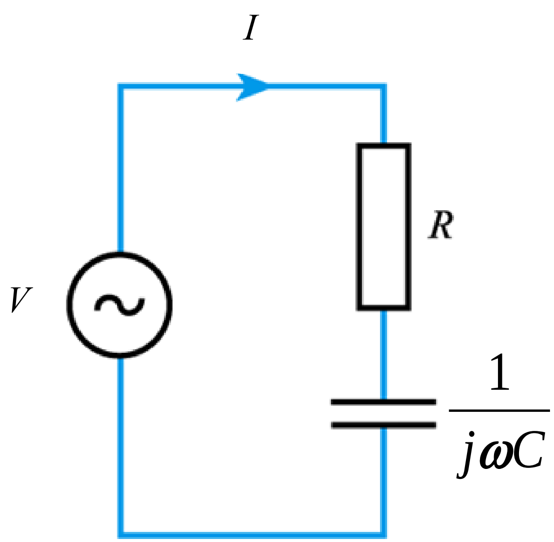
$$\angle\mathcal{H}(j\omega) = \angle\frac{\mathcal{V}_C}{\mathcal{V}} = \phi = arctg(0) - arctg(\omega RC)$$

Siendo $v(t) = V\cdot\cos(\omega t) = V\cdot\mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right]$

$$V_C = V\cdot\mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right]\left|H(j\omega)\right|\cdot\mathrm{Re}\left[e^{j\phi}\right] = \frac{V}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cdot\cos(\omega t+\phi)$$

Circuitos de 1er orden. RC

- Divisor de impedancias



$$\mathcal{V}_C = \frac{\mathcal{Z}_C}{\mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_C}\mathcal{V}$$

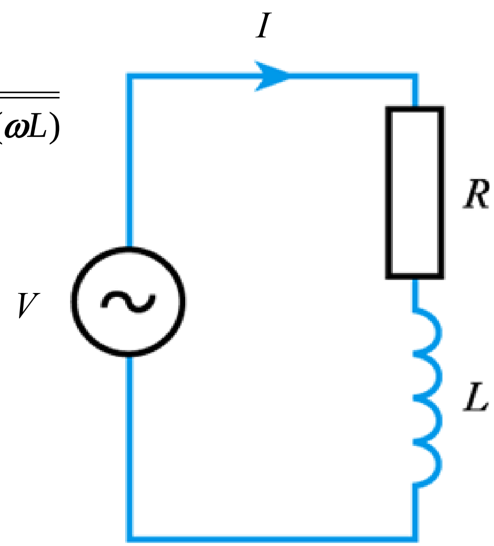
$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC}\mathcal{V}$$

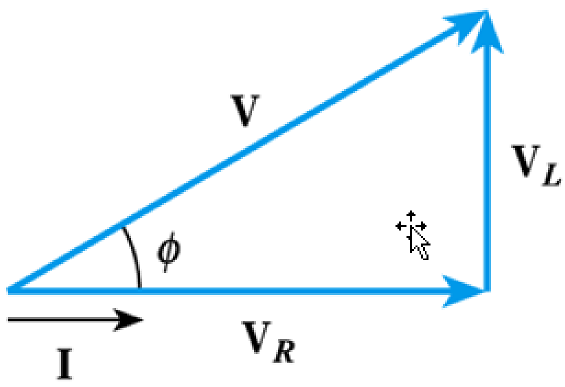
Circuitos de 1^er orden. RL

- Resolución fasorial o vectorial

Módulo:

$$V = \sqrt{R^2 \cdot I^2 + (\omega L)^2 \cdot I^2} \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)}}$$





Argumento:

$$\phi_i = \phi_v - \phi; \quad \phi = arctg\,\frac{\omega L}{R}$$

Solución:

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos(\omega t + \phi_v - \phi) \Leftrightarrow v_L(t) = -\frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \omega L \cdot sen(\omega t + \phi_v - \phi)$$

Método muy laborioso y difícil para circuitos más complicados

Circuitos de 1er orden. RL

- Resolución directa al régimen senoidal permanente mediante complejos

Función de transferencia $\mathcal{H}(j\omega)$

$$\mathcal{V}_L = \frac{j\omega L \cdot \mathcal{V}}{R + j\omega L} \Rightarrow \mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{V}_L}{\mathcal{V}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Módulo:

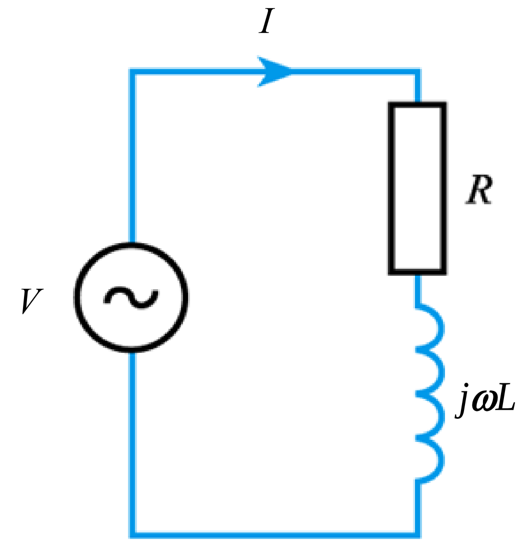
$$\left|\mathcal{H}(j\omega)\right| = \left|\frac{\mathcal{V}_L}{\mathcal{V}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

Argumento:

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = \angle \frac{\mathcal{V}_L}{\mathcal{V}} = arctg(\infty) - arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \frac{\pi}{2} - \phi$$

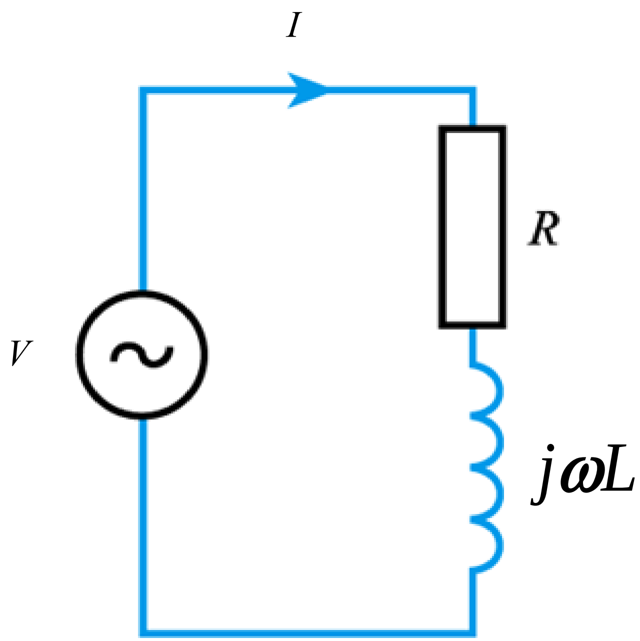
Siendo $v(t) = V \cdot \cos(\omega t) = V \cdot \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right]$ y $\phi = arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

$$V_L = V \cdot \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right] \left|H(j\omega)\right| \cdot \mathrm{Re}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)}\right] = \frac{V}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{V}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} \cdot sen(\omega t + \phi)$$



Circuitos de 1er orden. RL

- Divisor de impedancias

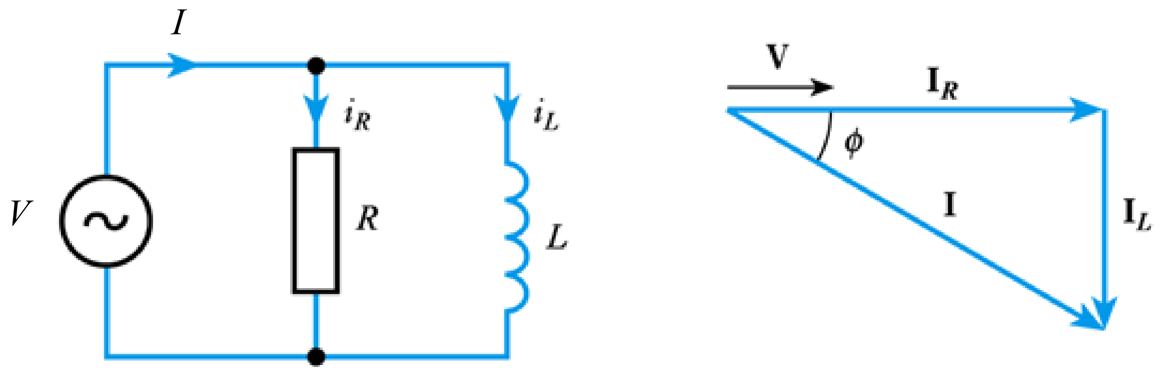


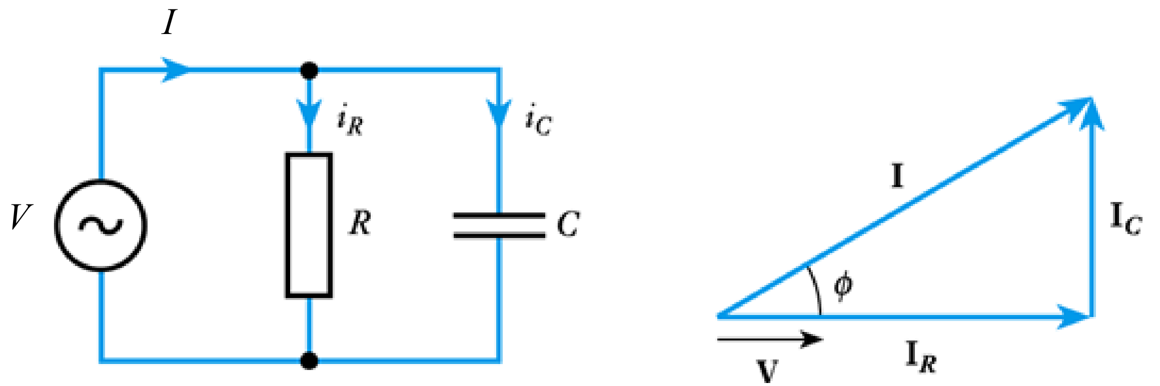
$$\mathcal{V}_L = \frac{\mathcal{Z}_L}{\mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_L}\mathcal{V}$$

$$\mathcal{V}_L = \frac{j\omega RL}{1 + j\omega RL}\mathcal{V}$$

Circuitos de 1er orden. Paralelo

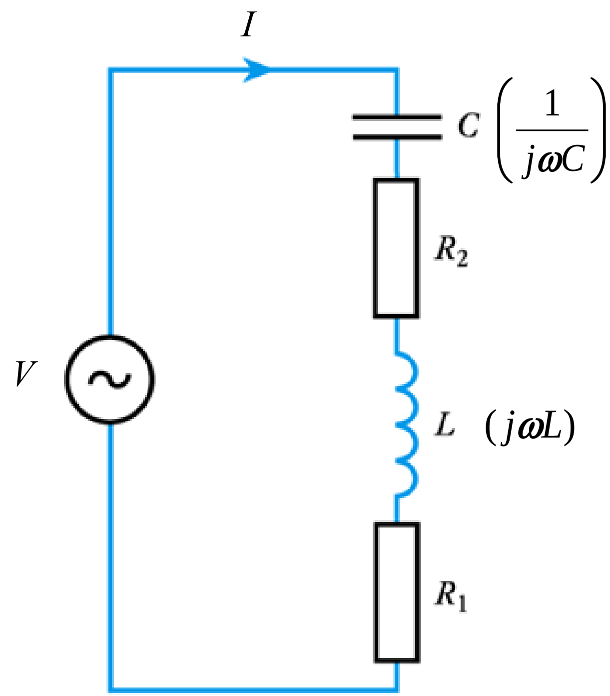
- Diagramas fasoriales de corrientes

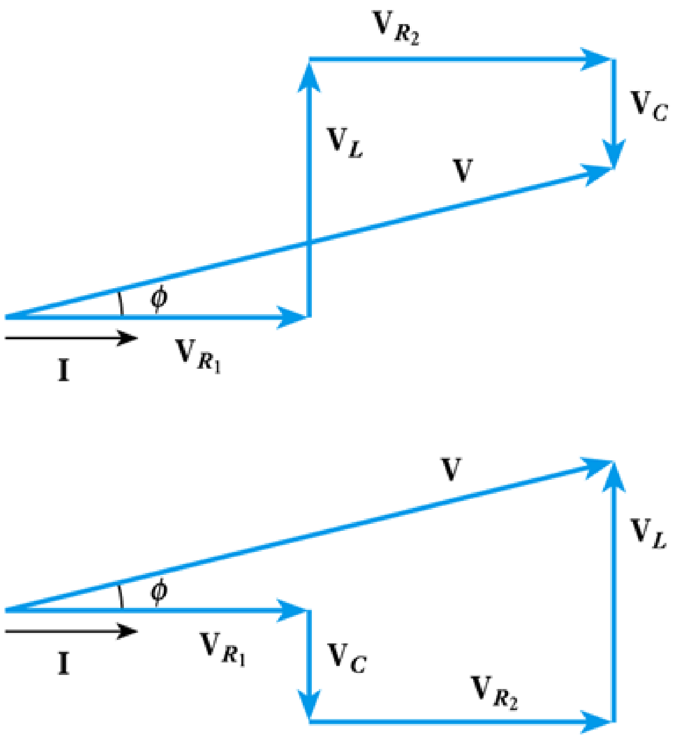




Circuitos de 2º orden. RLC

- Circuitos con 2 elementos almacenadores de energía





Potencia en una resistencia

- Potencia instantánea

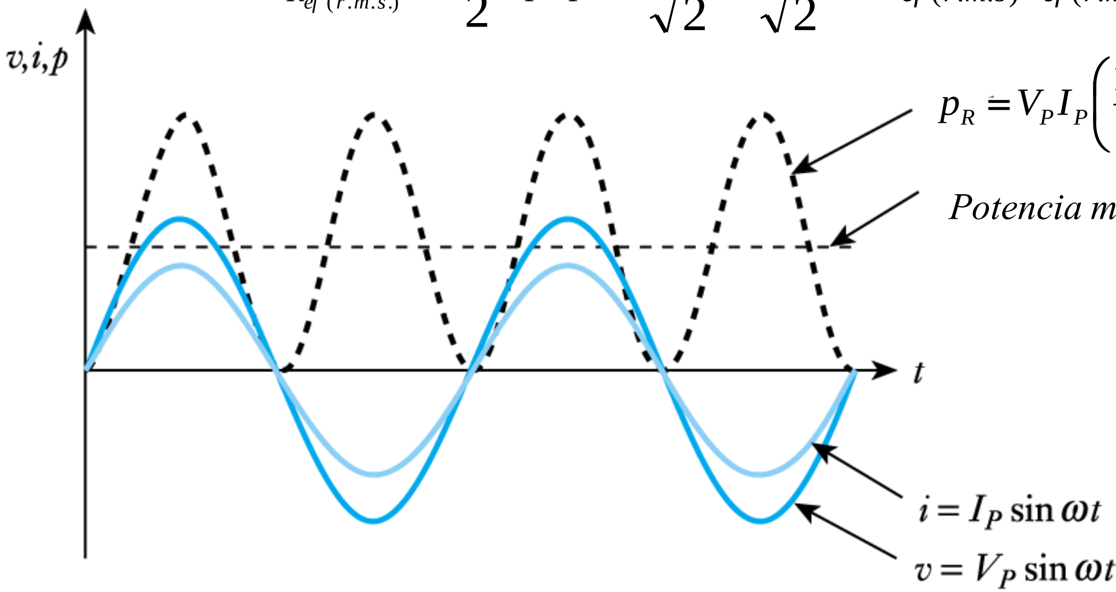
$$p_R(t) = v(t)\cdot i(t) \qquad p_R = V_P sen(\omega t)\times I_P sen(\omega t) = V_P I_P\, sen^2(\omega t) = V_P I_P\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right)$$

- Potencia media

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad P_{R_{m(av)}} = \frac{1}{2}V_P I_P$$

- Potencia eficaz

$$P_{R_{ef\,(r.m.s.)}} = \frac{1}{2}V_P I_P = \frac{V_P}{\sqrt{2}}\times\frac{I_P}{\sqrt{2}} = V_{ef\,(r.m.s)} I_{ef\,(r.m.s)}$$



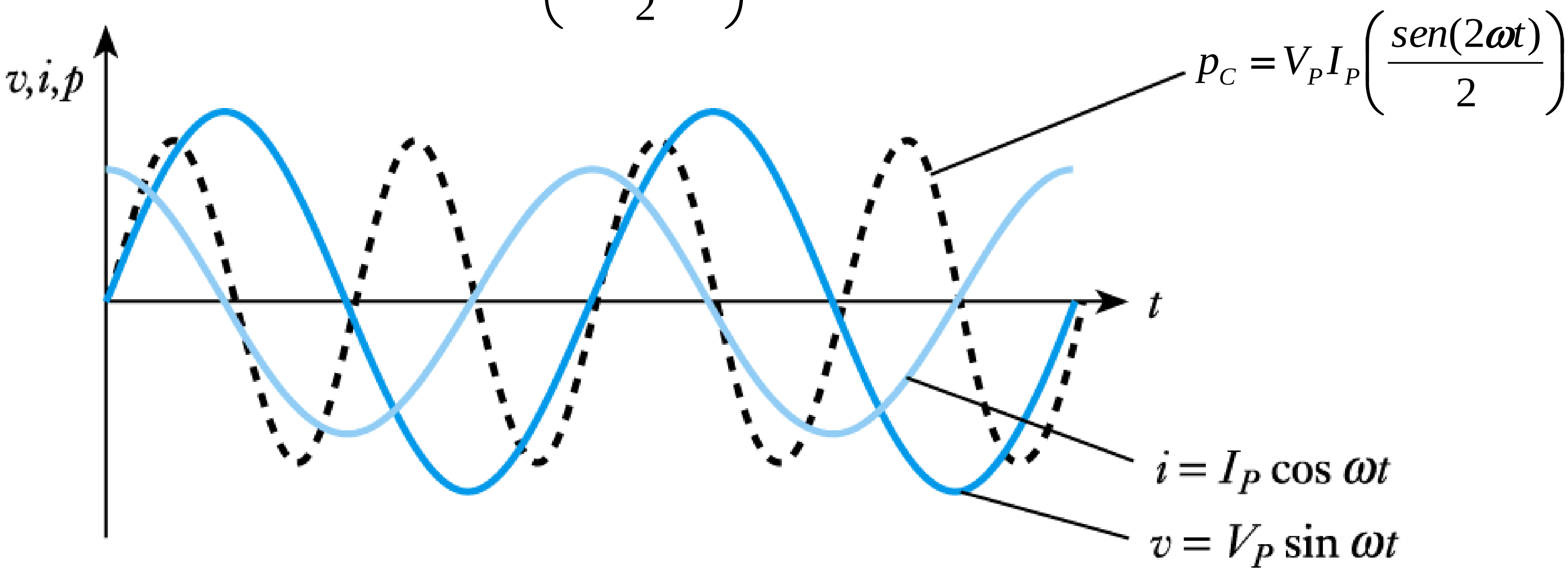
Potencia en un condensador

- Potencia instantánea (I adelanta 90º de V)

$$p_C(t) = v(t) \cdot i(t) \qquad p_C = V_P sen(\omega t) \times I_P \cos(\omega t) = V_P I_P \left(\frac{sen(2\omega t)}{2} \right)$$

- Potencia media y eficaz

$$\left(\frac{sen(2\omega t)}{2} \right) = 0 \qquad P_{C\,m(av)} = P_{C\,ef\,(r.m.s.)} = 0$$



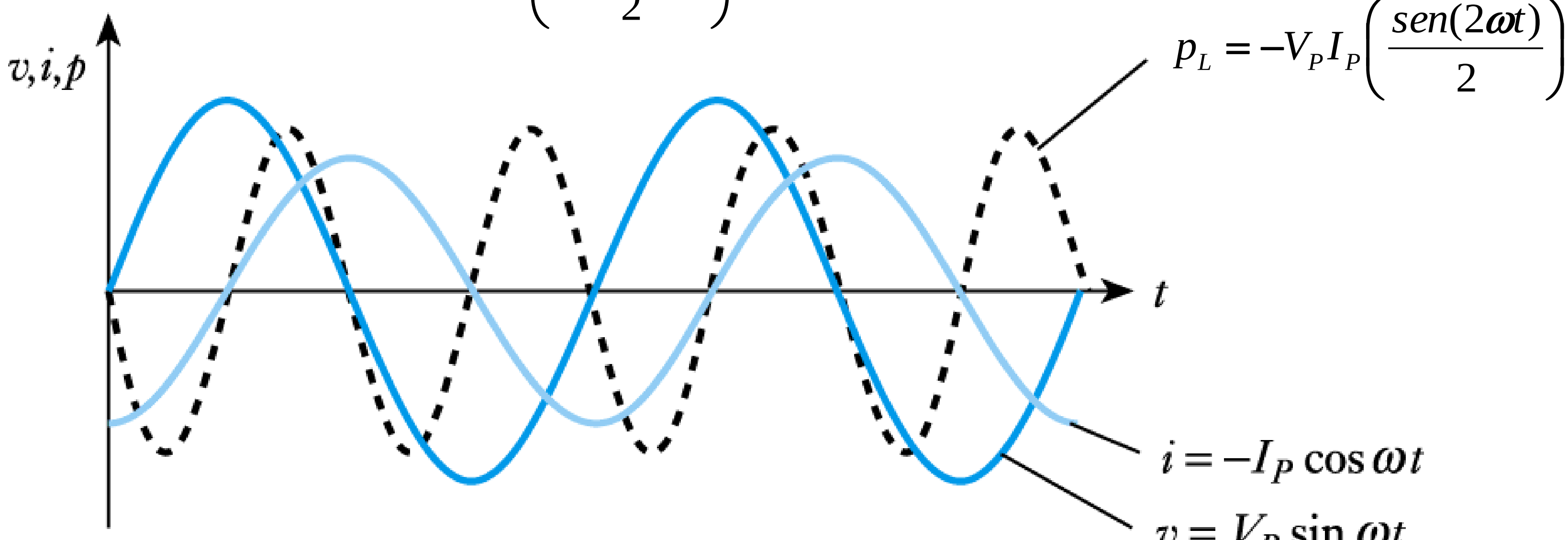
Potencia en una bobina

- Potencia instantánea (I retrasa 90º de V)

$$p_L(t) = v(t) \cdot i(t) \qquad p_L = V_P sen(\omega t) \times [-I_P \cos(\omega t)] = -V_P I_P \left(\frac{sen(2\omega t)}{2} \right)$$

- Potencia media y eficaz

$$\left(\frac{sen(2\omega t)}{2} \right) = 0 \qquad P_{L\,m(av)} = P_{L\,ef\,(r.m.s.)} = 0$$



Energía en régimen senoidal permanente

- Energía en una resistencia

$$w_R(t) = \int_0^t v(t)\cdot i(t)\,\partial t \qquad w_R = \int_0^t V_P I_P\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right)\partial t = \frac{V_{ef}\,I_{ef}}{\omega}\left(\omega t - \frac{sen(2\omega t)}{2}\right)$$

Valor creciente con t

- Energía en un condensador

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{1/\omega C} = \omega C V_{ef} \qquad w_C = \int_0^t V_P I_P\left(\frac{sen(2\omega t)}{2}\right)\partial t = \frac{1}{2} C V_{ef}^2 (1-\cos(2\omega t))$$

Valor oscilante con frecuencia $(2\omega t)$ entre 0 y CV_{ef}^2

- Energía en una bobina

$$V_{ef} = \omega L I_{ef} \qquad w_L = \int_0^t -V_P I_P\left(\frac{sen(2\omega t)}{2}\right)\partial t = \frac{1}{2} L I_{ef}^2 (1-\cos(2\omega t))$$

Valor oscilante con frecuencia $(2\omega t)$ entre 0 y LI_{ef}^2

Potencia en una resistencia y una bobina

- Potencia instantánea. La corriente irá desfasada ϕ_i

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \qquad p = V_P sen(\omega t) \times I_P sen(\omega t - \phi_i) = \frac{1}{2} V_P I_P \{\cos\phi_i - \cos(2\omega t - \phi_i)\}$$

$$p = \frac{1}{2} V_P I_P \cos\phi_i - \frac{1}{2} V_P I_P \cos(2\omega t - \phi_i)$$

- Potencia media. Primer término. Potencia disipada en los componentes resistivos

$$P = \frac{1}{2} V_P I_P (\cos\phi_i) = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \times \frac{I_P}{\sqrt{2}} \times (\cos\phi_i) = V_{ef} I_{ef} \cos\phi_i$$

- Potencia media. Segundo término. Potencia almacenada en el elemento reactivo (bobina), y que recircula por el circuito en cada ciclo

$$Frecuencia \;\; 2\omega t \qquad \cos(2\omega t - \phi_i) = 0$$

Potencia Activa y Reactiva

- En circuitos con componentes resistivos y reactivos, la potencia tiene dos términos:
  - ✓ Potencia disipada en los componentes resistivos. **Potencia activa** (P) en vatios (W)

$$P = \frac{1}{2} V_P I_P (\cos\phi_i) = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \times \frac{I_P}{\sqrt{2}} \times (\cos\phi_i) = V_{ef} I_{ef} \cos\phi_i$$

  - ✓ Potencia almacenada en los elementos reactivos y devuelta al circuito. **Potencia reactiva** (Q) en Voltamperios reactivos (VA_r)

$$p = -\frac{1}{2} V_P I_P \cos(2\omega t - \phi_i)$$

- El producto de la tensión eficaz V por la corriente eficaz I se denomina Potencia aparente (S) en Voltamperios (VA)

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos\phi_i = S \cos\phi_i$$

Potencia Activa y Reactiva

- La potencia reactiva (Q) no se disipa, pero al circular por el circuito obliga a dimensionar cables y otros elementos adecuadamente y aumenta las pérdidas

Potencia Activa (P)

$$P = VI\cos\phi\ [W]$$

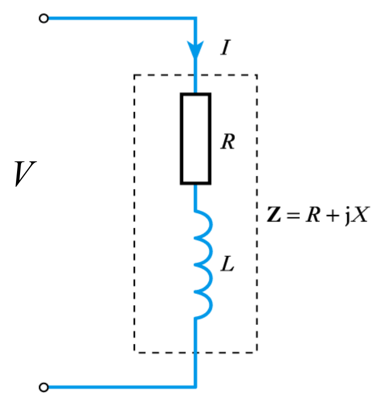
Potencia Reactiva (Q)

$$Q = VI\ sen\phi\ [VA_r]$$

Potencia Aparente (S)

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad [VA]^2$$

Las bobinas "consumen" potencia reactiva mientras con los condensadores la "suministran". Convenio de signos



(a)

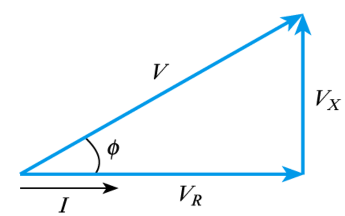


Diagrama de tensiones

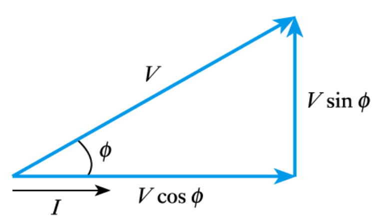


Diagrama de tensiones

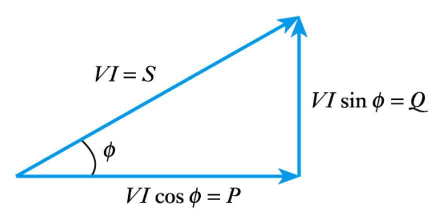


Diagrama de potencias

Factor de potencia

- Factor de potencia

$$\frac{\text{Potencia Activa } (W)}{\text{Potencia Aparente } (VA)} = \text{Factor de Potencia} \qquad \frac{P}{S} = \cos\phi$$

- Las cargas inductivas tienen un factor de potencia "de retraso"
- Las cargas capacitivas tienen un factor de potencia "de adelanto"
  - ✓ Un motor de alterna típico tiene un factor de potencia inductivo de 0,9
  - ✓ Una gran red eléctrica nacional tiene un factor de potencia inductivo de 0,8 - 0,9
  - ✓ Equipos electrónicos: Fuentes conmutadas, rectificadores e inversores
  - ✓ Industrias. Motores trifásicos. Hornos de inducción. Ferrocarriles

Factor de potencia. Corrección

- El problema de un bajo factor de potencia se puede corregir añadiendo al circuito componentes adicionales que lo hagan cercano a la unidad. **Correción del Factor de Potencia**
  - ✓ Instalaciones eléctricas convencionales. Un condensador del tamaño adecuado en paralelo con una carga con un bajo factor de potencia inductivo puede “cancelar” el efecto inductivo
  - ✓ Podría colocarse en serie, pero modificaría la tensión en la carga
  - ✓ Cuanto más cercano a la unidad, más eficiente el sistema
  - ✓ Cuanto más lejano de la unidad, aumentan las pérdidas, hay que sobredimensionar las instalaciones, hay caídas de tensión
  - ✓ Las compañias eléctricas penalizan en la factura los consumos con bajo (pobre) factor de potencia

Respuesta en frecuencia

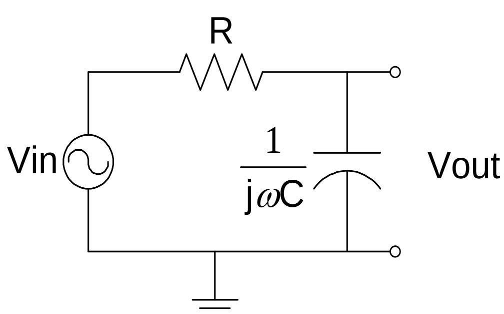
Gráfica de la magnitud y la fase de la **función de transferencia** en función de la frecuencia.

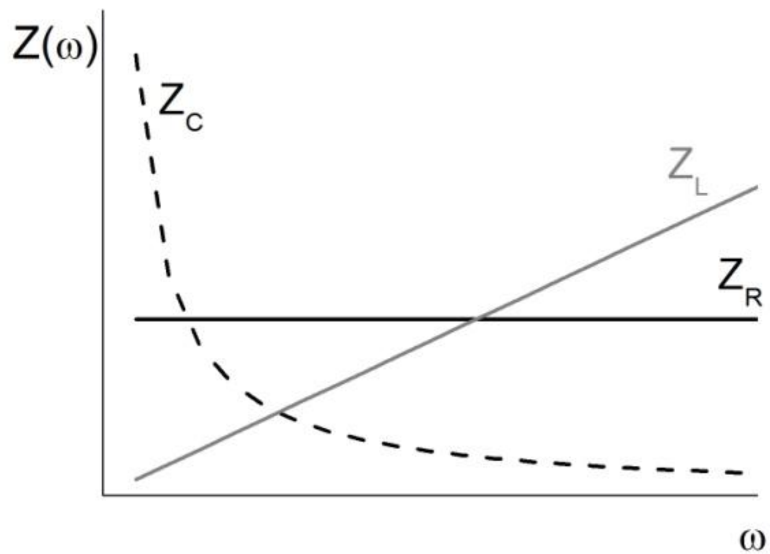
Función de transferencia, $\mathcal{H}(w)$, es el cociente entre la amplitud compleja de la salida, $\mathcal{Y}(w)$ (tensión o corriente), entre la amplitud compleja de la entrada $\mathcal{X}(w)$ (tensión o corriente)

El módulo de la función de transferencia indica la ganancia del sistema en función de la frecuencia. La fase es la diferencia angular entre las sinusoides de salida y de entrada

Aplicación fundamental del análisis de respuesta en frecuencia: filtros. Circuito RC

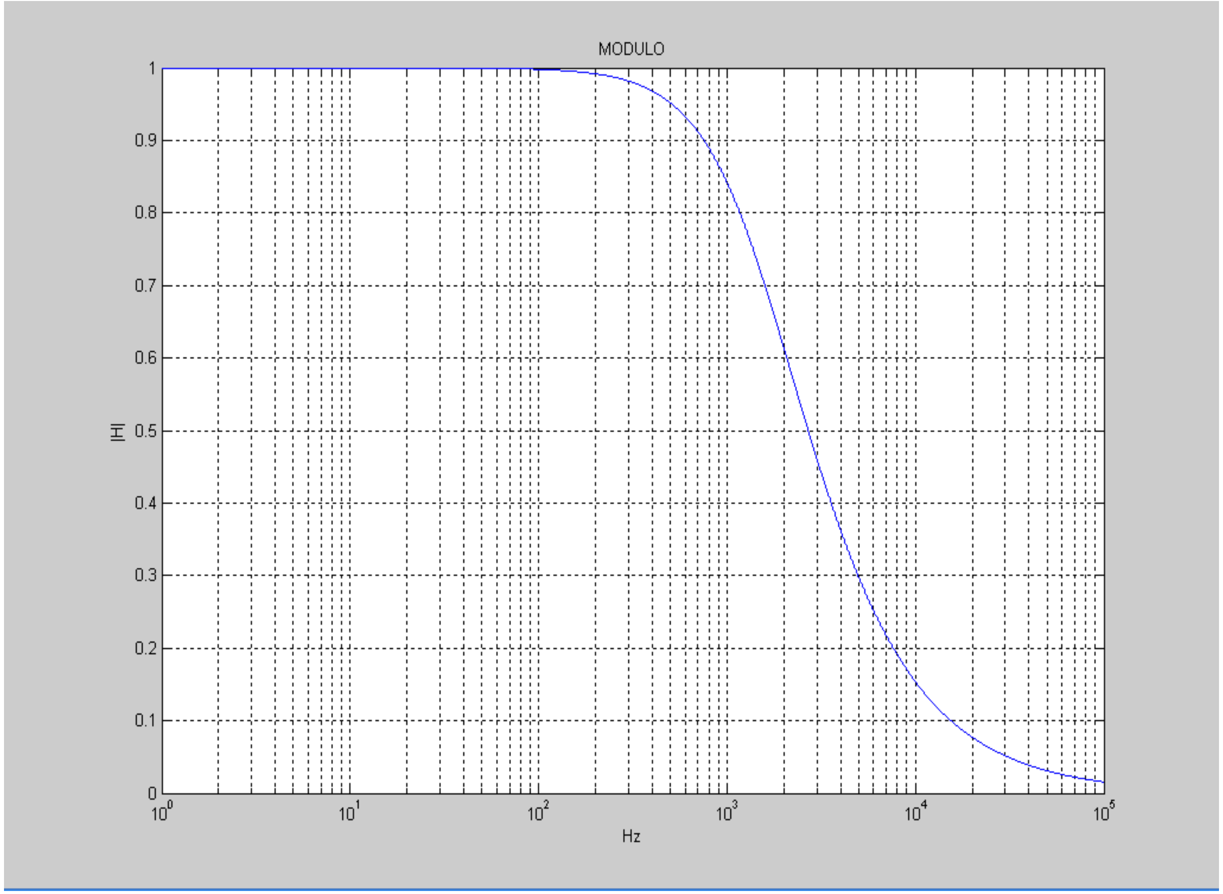
.





Respuesta en frecuencia

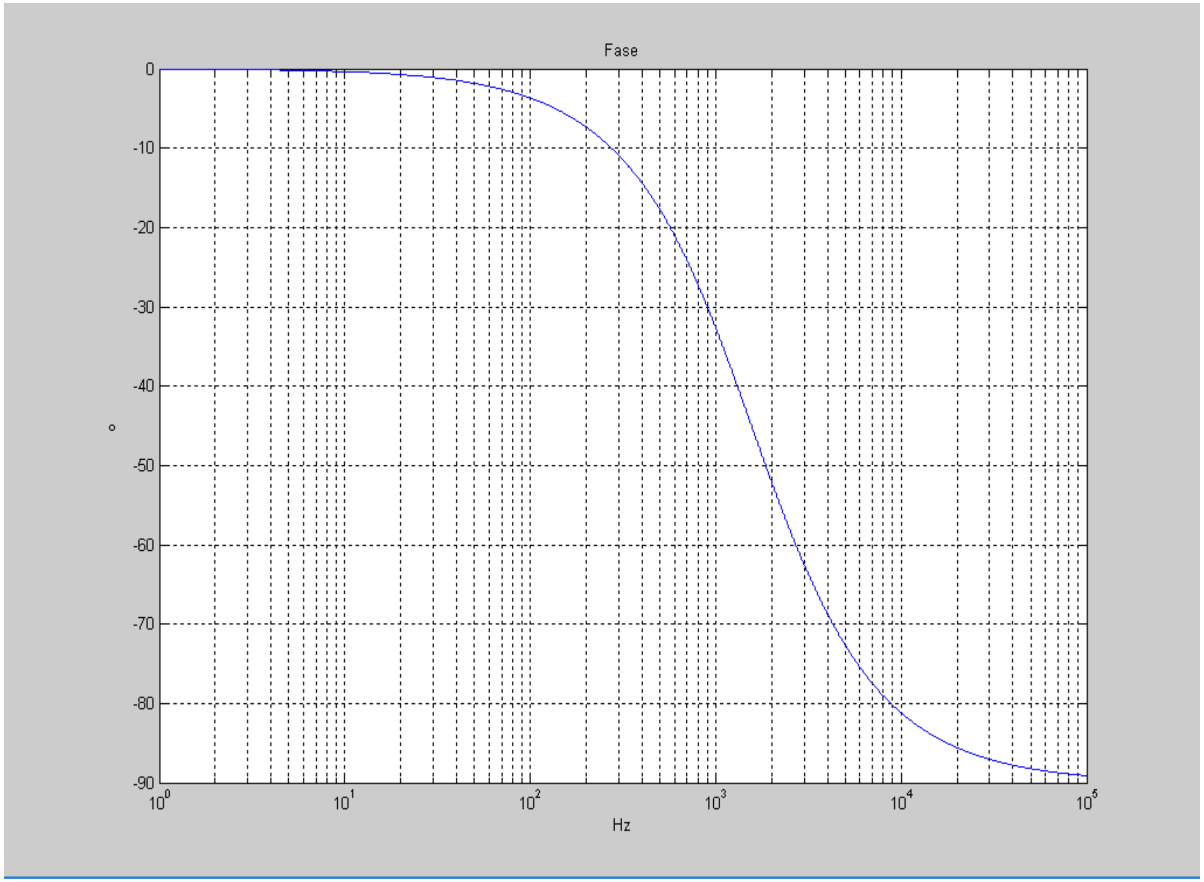
Circuito RC. Módulo. $\left|\mathcal{H}(j\omega)\right| = \left|\frac{\mathcal{V}_C}{\mathcal{V}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$



Respuesta en frecuencia

Circuito RC. Fase o Argumento.

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{V_{out}}{V_{in}} = \varphi = arctg(0) - arctg(\omega RC)$$



- [621.3.049.77 HOR MIC] Microelectrónica: circuitos y dispositivos. M. N. Horenstein, Prentice Hall
- [621.3.049 NIL CIR] Circuitos eléctricos. Nilsson, James W. Pearson Prentice Hall.
- [621.3.049 TEO DEC VOL. 1 y 2] Teoría de Circuitos. V. Parra, J. Ortega, A. Pastor, A. Pérez. UNED
- [621.3.049 ALE FUN] Fundamentals of electric circuits ó Fundamentos de circuitos eléctricos. Alexander, Charles K., Matthew N. O. Sadiku.
- [621.3.049 STO ELE] Electronics: A Systems Approach. Neil Storey. Pearson-Prentice Hall.4th Edition